Série A

#(1) a) On souhaite construire la matrice $A=(a_{ij})_{3\times 3}$

où a_{ij} = le temps obtenu à la course j de l'athlète classé au rang i du tableau final

tableau final

	rang	Athlète
(i=1)	1	Usain Bolt
(i=2)	2	Justin Gatlin
(i=3)	3	Andre De Grasse

rang 1 au tableau final = médaille d'or
rang 2 " " " = " d'argent
rang 3 " " " = " de bronze

Donc sur la ligne 1 (i=1), on inscrit les temps de Bolt
" " " 2 (i=2), " " " " " Gatlin
" " " 3 (i=3), " " " " " De Grasse

$$A = \begin{array}{c} \\ \text{Bolt} \\ \text{Gatlin} \\ \text{De Grasse} \end{array} \begin{pmatrix} \text{Course 1} & \text{Course 2} & \text{Course 3} \\ 10,07 & 9,86 & 9,81 \\ 10,01 & 9,94 & 9,89 \\ 10,04 & 9,92 & 9,91 \end{pmatrix}$$

b) a_{32} = le temps de De Grasse à la deuxième course = 9,92

c) Vrai ou Faux ? Pour tout i, si $j<k$ alors $a_{ij} > a_{ik}$.

C'est à dire que pour un i fixé (une ligne), si $j<k$ a-t-on $a_{ij} > a_{ik}$?

Ici, j et k sont des indices pour identifier des colonnes.

Donc $j<k$ signifie que la colonne j se situe à gauche de la colonne k.

Or, pour toute ligne de la matrice A ($i=1,2,3$), on observe une décroissance stricte des nombres en parcourant cette ligne de gauche à droite.

$$\begin{cases} 10,07 > 9,88 > 9,81 \\ 10,01 > 9,94 > 9,89 \\ 10,04 > 9,92 > 9,91 \end{cases}$$

Conclusion : Pour tout i, si $j<k$ alors $a_{ij} > a_{ik}$. **Vrai**

Série A

#⑦ construire les matrices suivantes

a) $A = (a_{ij})_{3\times 4}$ telle que $a_{ij} = (-1)^{i+j}$

$$a_{11} = (-1)^{1+1} = (-1)^2 = 1$$
$$a_{12} = (-1)^{1+2} = (-1)^3 = -1$$
$$a_{13} = (-1)^{1+3} = (-1)^4 = 1$$
$$\vdots$$
$$a_{44} = (-1)^{4+4} = (-1)^8 = 1$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

b) $B = (b_{ij})_{4\times 2}$ telle que $b_{ij} = i^2 + j$

colonne 1
$$b_{11} = 1^2 + 1 = 2$$
$$b_{21} = 2^2 + 1 = 5$$
$$b_{31} = 3^2 + 1 = 10$$
$$b_{41} = 4^2 + 1 = 17$$

colonne 2
$$b_{12} = 1^2 + 2 = 3$$
$$b_{22} = 2^2 + 2 = 6$$
$$b_{32} = 3^2 + 2 = 11$$
$$b_{42} = 4^2 + 2 = 18$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \\ 10 & 11 \\ 17 & 18 \end{pmatrix}$$

Série A

#⑦ Soit $A=(a_{ij})_{5\times5}$ où $a_{ij}=i-j$ et $B=(b_{ij})_{5\times5}$ où $b_{ij}=ij$.

a) Déterminer c_{32} où $C=2A-B$. $\quad \| C=(c_{ij})_{5\times5}$

$$c_{32}=2\cdot a_{32}-b_{32}=2\cdot(3-2)-3\cdot2$$
$$=2\cdot1-6=-4$$

b) Déterminer d_{25} où $D=-(A+3B)$ $\quad \| D=(d_{ij})_{5\times5}$

$$d_{25}=-(a_{25}+3\cdot b_{25})$$
$$=-(2-5+3\cdot(2\cdot5))$$
$$=-(-3+30)=-27$$

Série A

#10 $A, B \in M_{2\times 2}$ et $k \in \mathbb{R}$, démontrer

$$k(A+B) = kA + kB$$

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ et $k \in \mathbb{R}$

Preuve : $k(A+B) = k\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\right)$ Notation

$= k\begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix}$ déf d'addition de matrices

$= \begin{pmatrix} k(a+e) & k(b+f) \\ k(c+g) & k(d+h) \end{pmatrix}$ déf de mult. par un scalaire

$= \begin{pmatrix} ka+he & kb+kf \\ kc+kg & kd+kh \end{pmatrix}$ distributivité dans $\mathbb{R}$

$= \begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ke & kf \\ kg & kh \end{pmatrix}$ définition de addition de matrices

$= k\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ déf. de mult. par un scalaire

$= kA + kB$ Notation

□

Série A

#(11) Pour $A \in M_{m\times n}$, démontrer que

$$A+(-A)=0$$

$$A=(a_{ij})_{m\times n}$$

$$-A=(-a_{ij})_{m\times n}$$

Preuve:

$$A+(-A)=(a_{ij})_{m\times n}+(-a_{ij})_{m\times n}$$

$$=(a_{ij}-a_{ij})_{m\times n}$$ définition de addition de matrices

$$=(0)_{m\times n}=0_{m\times n}$$ } matrice nulle

$$=0$$

Série A

#(12) $A \in M_{m\times n}$ et $k, \ell \in \mathbb{R}$ démontrer que

$$k(\ell A) = (k\ell)(A)$$

$A = (a_{ij})_{m\times n}$

Preuve :

$$\begin{aligned}
k(\ell A) &= k\left(\ell (a_{ij})_{m\times n}\right) && \text{Notation}\\
&= k\left(\ell a_{ij}\right)_{m\times n} && \text{déf. de mult. par un scalaire}\\
&= \left(k(\ell a_{ij})\right)_{m\times n} && \text{déf. de mult. par un scalaire}\\
&= \left((k\ell) a_{ij}\right)_{m\times n} && \text{associativité du produit dans } \mathbb{R}\\
&= (k\ell)\left(a_{ij}\right)_{m\times n} && \text{déf. de mult. par un scalaire}\\
&= (k\ell)\, A && \text{Notation}
\end{aligned}$$

∎

Série A

#(15) $A = (a_{ij})_{5\times 2}$, $B = (b_{ij})_{2\times 3}$ et $C = (c_{ij})_{3\times 4}$

où $a_{ij} = 2i - j$, $b_{ij} = ij$ et $c_{ij} = i + j$

$AB = D_{5\times 3}$ et $BC = E_{2\times 4}$

a) $d_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} = (2\cdot 1 - 1)(1\cdot 1) + (2\cdot 1 - 2)(1\cdot 2)$

$= 1 + 0 = 1$

b) $d_{42} = a_{41}b_{12} + a_{42}b_{22}$

$= (2\cdot 4 - 1)(1\cdot 2) + (2\cdot 4 - 2)(2\cdot 2)$

$= 7\cdot 2 + (8-2)\cdot 4 = 14 + 24 = 38$

e) $e_{23} = b_{21}c_{13} + b_{22}c_{23} + b_{23}c_{33}$

$= (2\cdot 1)(1+3) + (2\cdot 2)(2+3) + (2\cdot 3)(3+3)$

$= 8 + 20 + 36 = 64$

Série A

#16

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3\times3} B = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ -3 \end{pmatrix}_{3\times1}$$

$$\Rightarrow B_{3\times1} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ 2b+c \\ -a+c \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow$ syst. d'équations à résoudre

$$\begin{cases} a+b=8 & (1) \\ 2b+c=12 & (2) \\ -a+c=-3 & (3) \end{cases}$$

de (2) $c = 12-2b$

dans (3) $-a+(12-2b) = -3$

$-a+12-2b = -3$

$15-2b = a$

dans (1) $(15-2b)+b = 8$

$\Rightarrow \boxed{7 = b}$

$\Rightarrow \boxed{a = 1}$

dans (3) $-1+c = -3$

$\boxed{c = -2}$

Conclusion $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}$

Série A #(19) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ on cherche $B_{2\times 2}$ non nulle telle que $AB = 0$

Soit $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 2a+4c & 2b+4d \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow$ système d'équations à résoudre

$$\begin{cases} (1)\ a+2c=0 \\ (2)\ b+2d=0 \\ (3)\ 2a+4c=0 \\ (4)\ 2b+4d=0 \end{cases}$$

de (1) et (3) $\Rightarrow a = -2c$

de (2) et (4) $\Rightarrow b = -2d$.

prenons par exemple $c = 1$ et $d = 1$

$$\Rightarrow B = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Série A

(20) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$

a) On veut que $AB = BA$

D'une part, $AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+1 & 1+b \\ a & 1 \end{pmatrix}$

d'autre part, $BA = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+1 & a \\ 1+b & 1 \end{pmatrix}$

$\Longrightarrow AB = BA \Longleftrightarrow \boxed{1+b = a}$

b) Soit $C = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & k \end{pmatrix}$ où $k \in \mathbb{R}$.

$AC = CA \Longleftrightarrow$ C est de la forme $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$

où $1+b = a$ (voir question précédente)

ici $a = 5$ et $b = k$.

donc $AC = CA \Longleftrightarrow 1+k = 5$

$\Longleftrightarrow \boxed{k = 4}$

Série A

#(25) Donner la forme générale de A^n.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = 2A$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= 2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= 4A = 2^2 A$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= 4\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = 8A = 2^3 A$$

$\vdots$

$$A^n = 2^{n-1} A$$

Série A

#(25) b) trouver la forme générale de A^n pour

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$6 = 3+2+1$

$$A^4 = A^3A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 10 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$10 = 4+3+2+1$

$$A^5 = A^4A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 10 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 15 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$15 = 5+4+3+2+1$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 \\ n+(n-1)+(n-2)+\cdots+3+2+1 & n & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 \\ \frac{n(n+1)}{2} & n & 1 \end{pmatrix}$$

Série A

#(26) Démontrer : Pour $k \in \mathbb{R}$, $A_{m\times p}$ et $B_{p\times n}$, nous avons $(kA)B = k(AB)$

$$A = (a_{ij})_{m\times p} \quad \text{et} \quad B = (b_{ij})_{p\times n}.$$

Preuve :

$$(kA)B = \left(k(a_{ij})_{m\times p}\right)(b_{ij})_{p\times n} \qquad \text{Notation.}$$

$$= (ka_{ij})_{m\times p}(b_{ij})_{p\times n} \qquad \text{déf. de multiplication par un scalaire}$$

$$= \left(\sum_{l=1}^{p}(ka_{il})b_{lj}\right)_{m\times n} \qquad \text{définition de multiplication matricielle.}$$

$$= \left(\sum_{l=1}^{p} k(a_{il}b_{lj})\right)_{m\times n} \qquad \text{associativité du produit dans } \mathbb{R}$$

$$= \left(k\sum_{l=1}^{p} a_{il}b_{lj}\right)_{m\times n} \qquad \text{distributivité dans } \mathbb{R}$$

$$= k\left(\sum_{l=1}^{p} a_{il}b_{lj}\right)_{m\times n} \qquad \text{déf. de mult. par un scalaire}$$

$$= k\left((a_{ij})_{m\times p}(b_{ij})_{p\times n}\right) \qquad \text{déf de multiplication matricielle}$$

$$= k(AB) \qquad \text{Notation}$$